

## 07. Производная и первообразная

### Часть 1. ФИПИ (www.fipi.ru)

#### I) Физический смысл производной

**Задание 1.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = 12t^2 + 4t + 27$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени  $t = 2$  с.

**Задание 2.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = 13t^2 - 2t + 44$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени  $t = 2$  с.\*

**Задание 3.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 45t + 130$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 20 м/с?

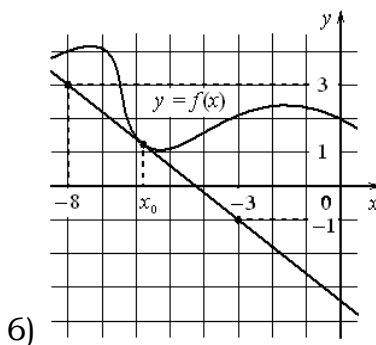
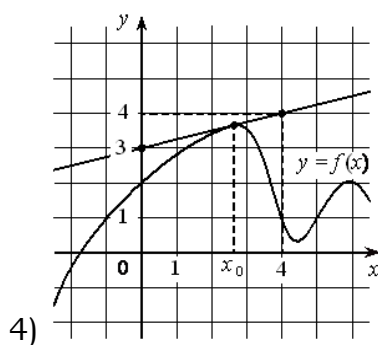
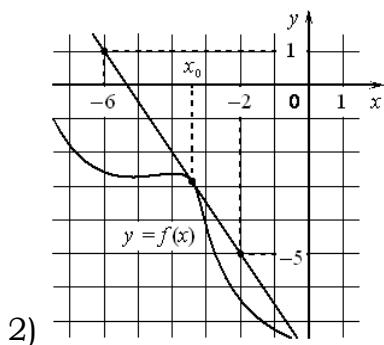
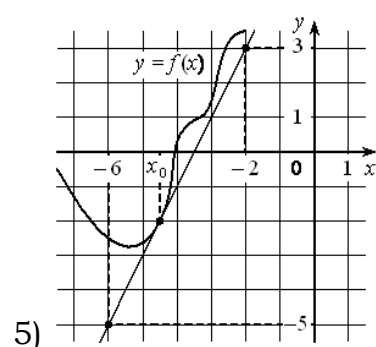
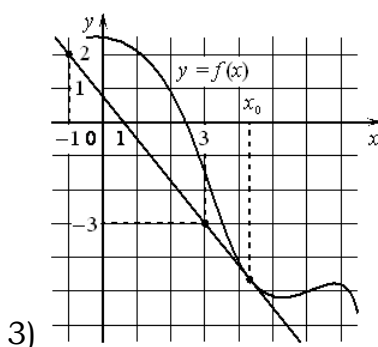
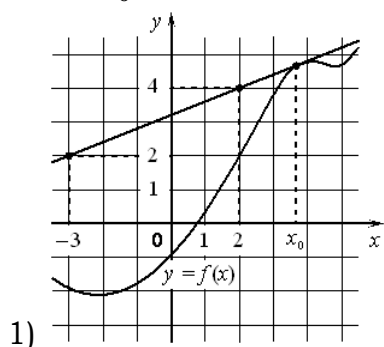
**Задание 4.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{6}t^3 + t^2 - 8t + 180$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 40 м/с?

**Задание 5.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 190$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 48 м/с?

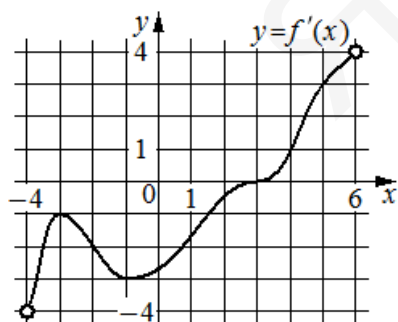
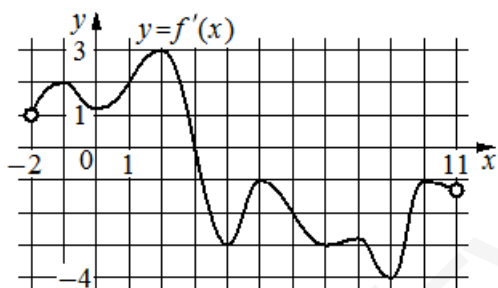
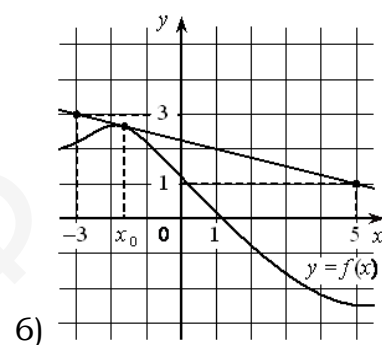
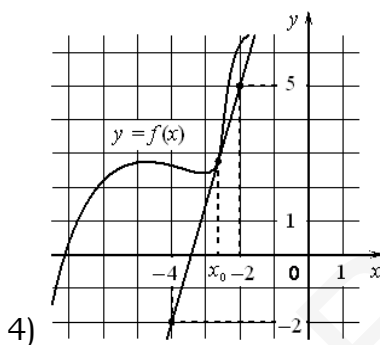
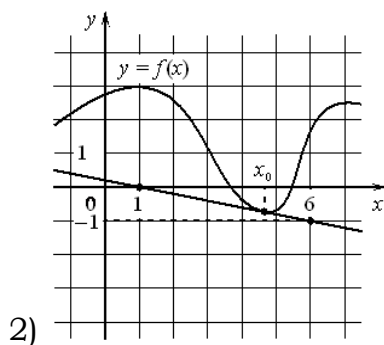
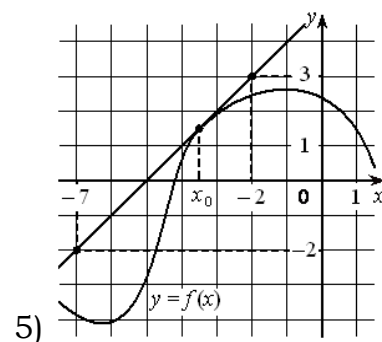
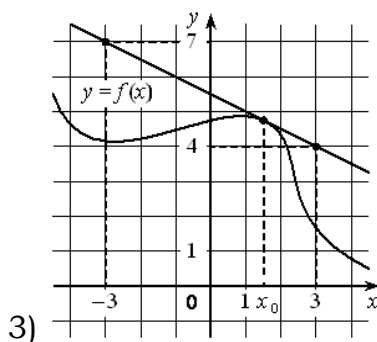
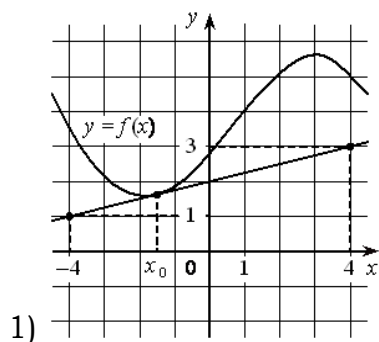
**Задание 6.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t + 250$ , где  $x$  – расстояние от точки отсчёта в метрах,  $t$  – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 96 м/с?

#### II) Геометрический смысл производной, касательная

**Задание 7.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

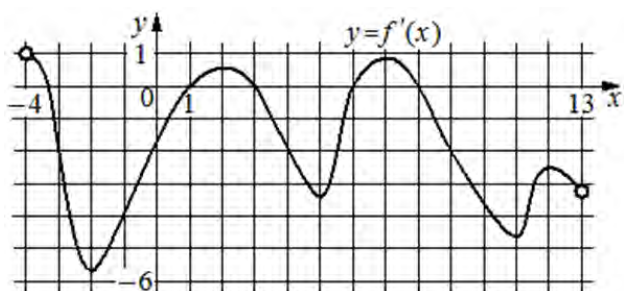


**Задание 8.** На рисунке изображены график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $M$ .



**Задание 9.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 11)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

**Задание 10.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-4; 6)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 3x$  или совпадает с ней.

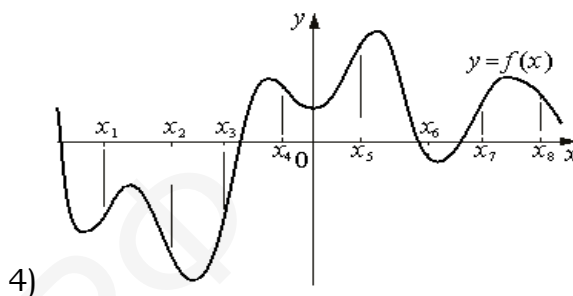
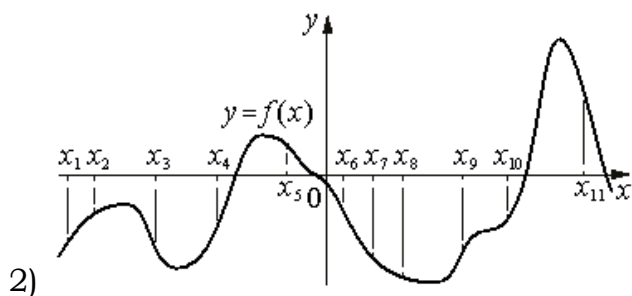
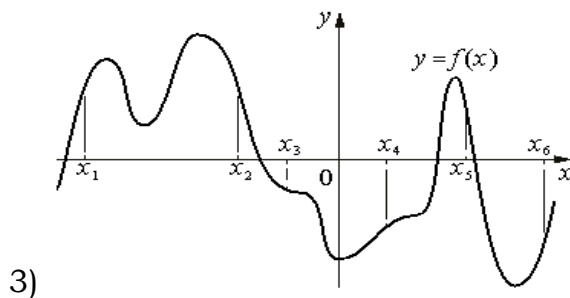
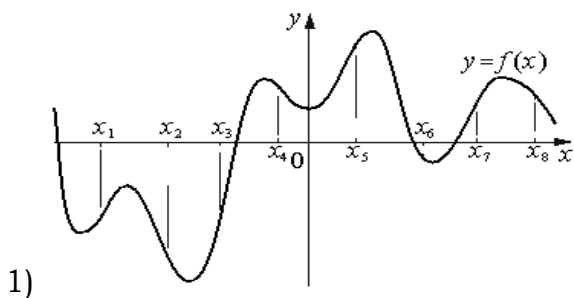


**Задание 11.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-4; 13)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  ...

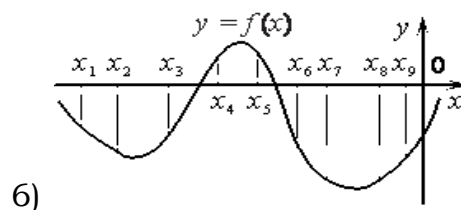
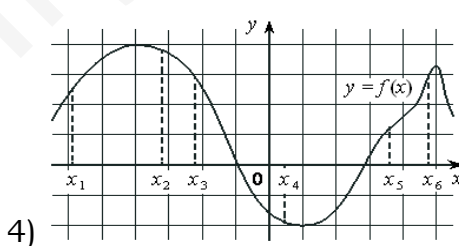
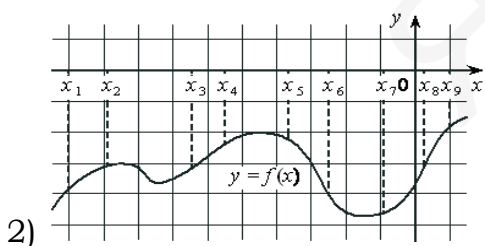
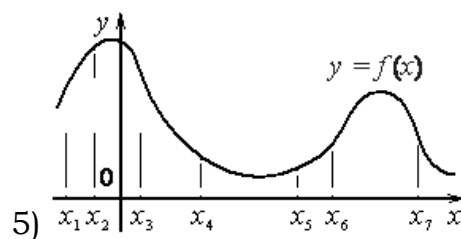
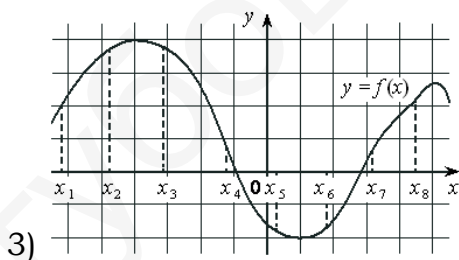
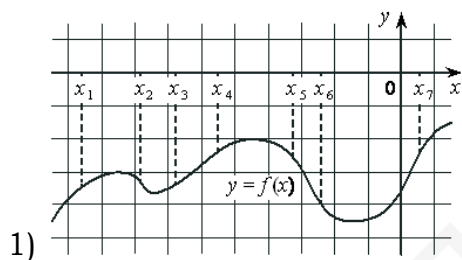
- а) параллельна прямой  $y = 14$ ;
- б) параллельна прямой  $y = -2x - 10$  или совпадает с ней.

III) Исследование функций (производная)

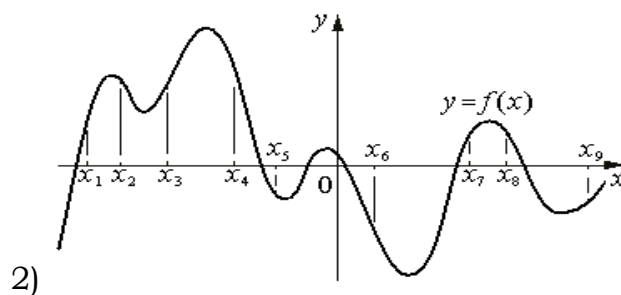
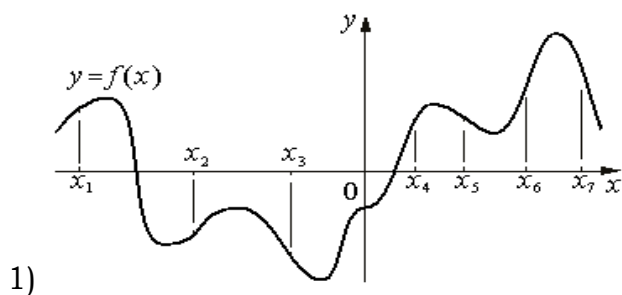
**Задание 12.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?



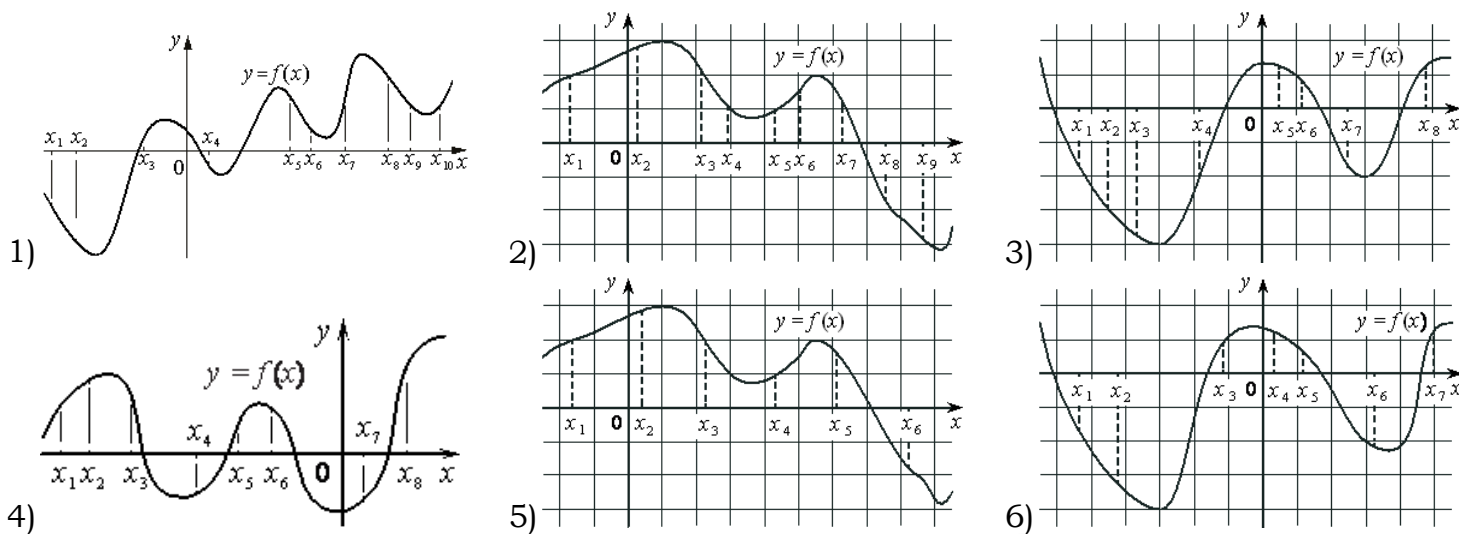
**Задание 13.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?



**Задание 14.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  положительна?

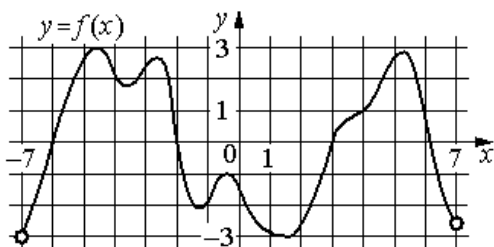


**Задание 15.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  положительна?

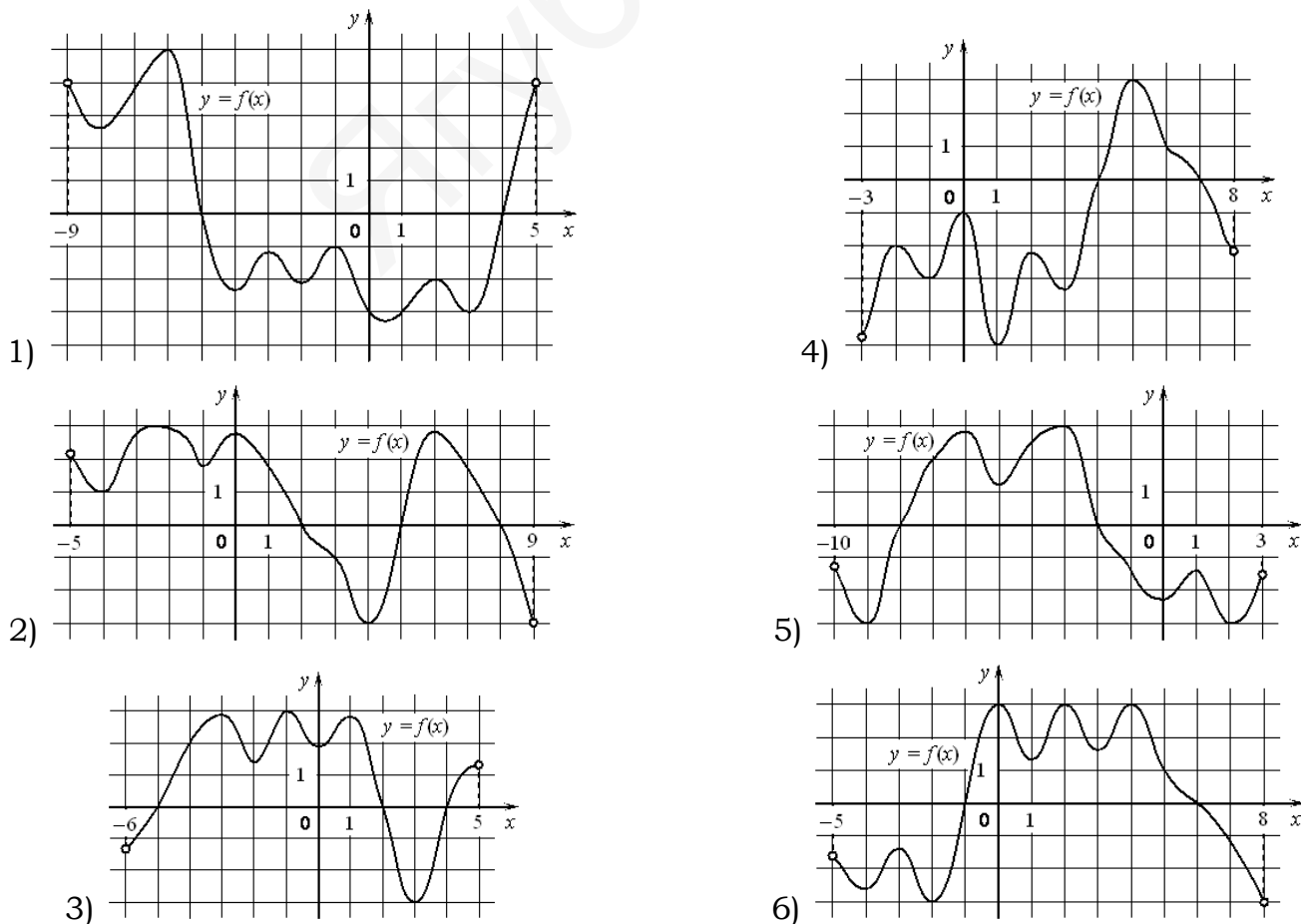


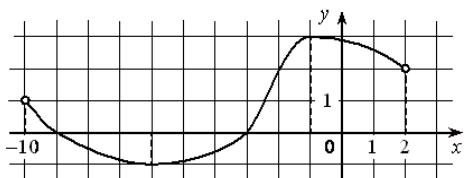
**Задание 16.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 7)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции...

- 1) положительна;
- 2) отрицательна?

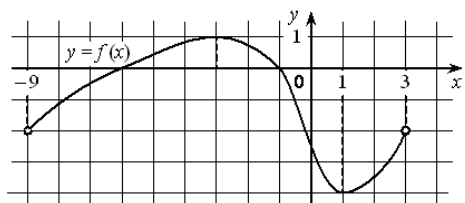


**Задание 17.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите количество точек, в которых производная функции  $f(x)$  равна 0.

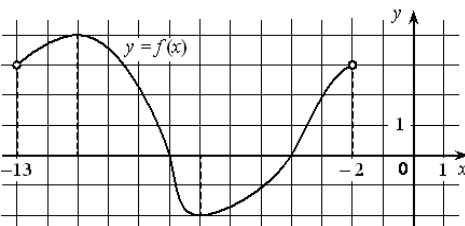




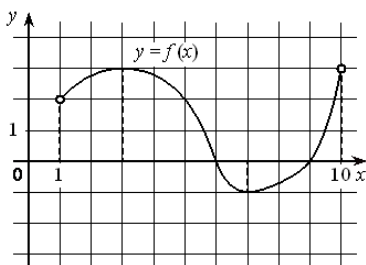
**Задание 18.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-10; 2)$ . Найдите точку из отрезка  $[-9; -2]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.



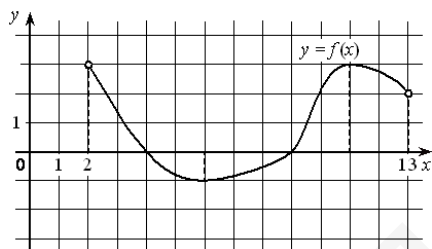
**Задание 19.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 3)$ . Найдите точку из отрезка  $[-8; 0]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.



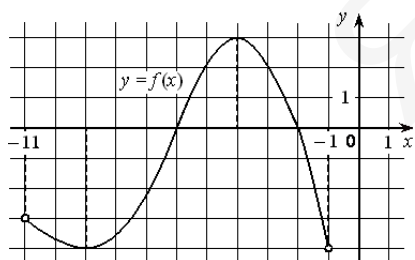
**Задание 20.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-13; -2)$ . Найдите точку из отрезка  $[-10; -3]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.



**Задание 21.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(1; 10)$ . Найдите точку из отрезка  $[2; 6]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.

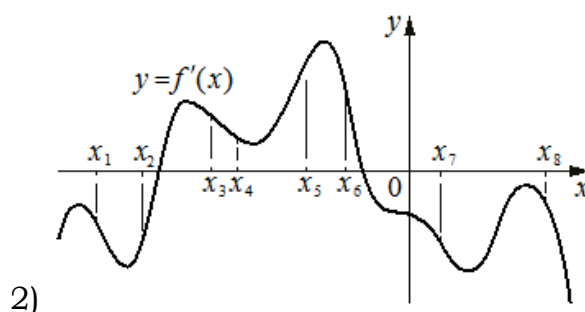
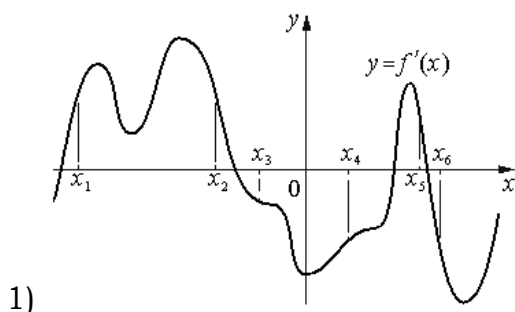


**Задание 22.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(2; 13)$ . Найдите точку из отрезка  $[7; 12]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.

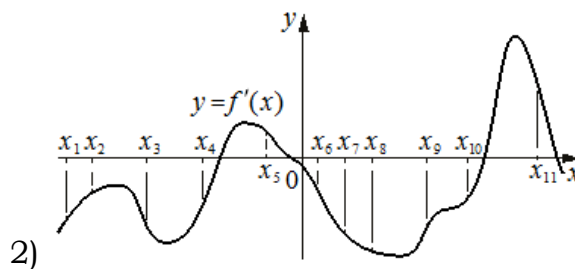
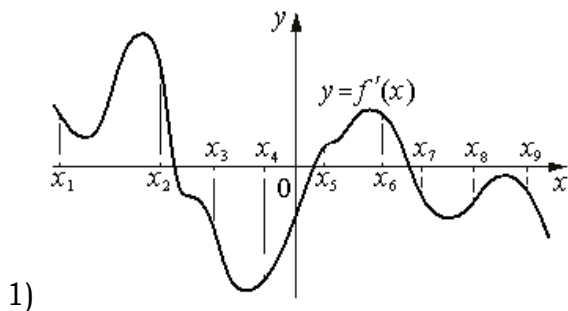


**Задание 23.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; -1)$ . Найдите точку из отрезка  $[-7; -2]$ , в которой производная функции  $f(x)$  равна 0.

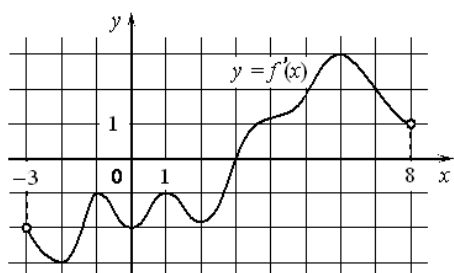
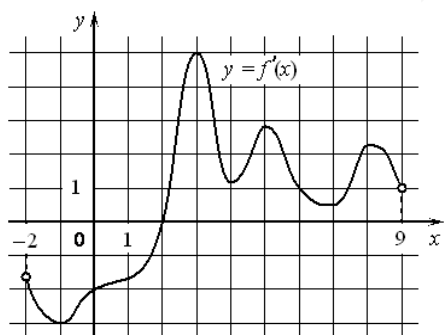
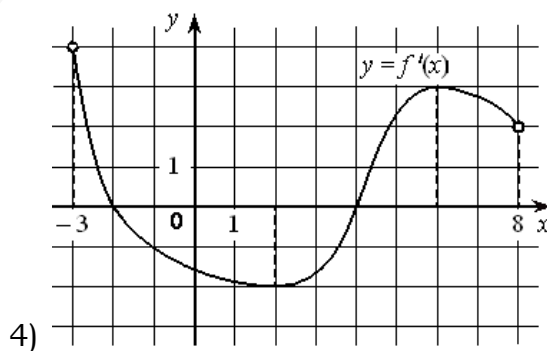
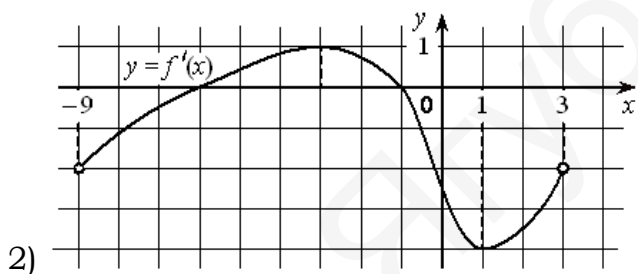
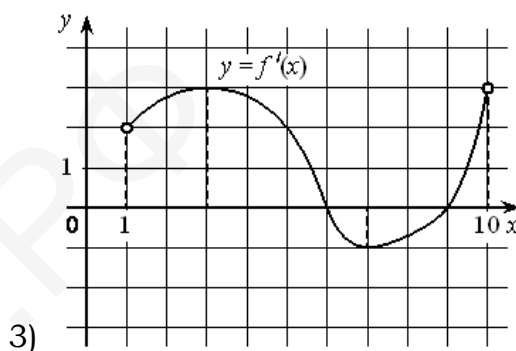
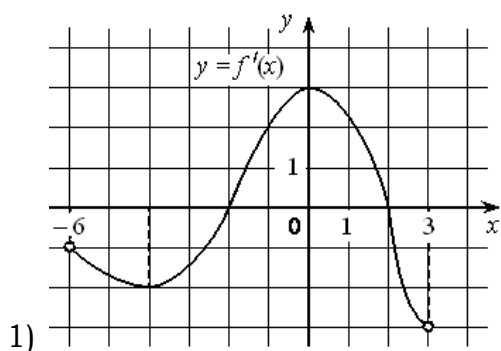
**Задание 24.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции  $f(x)$ ?



**Задание 25.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены  $n$  точек:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции  $f(x)$ ?

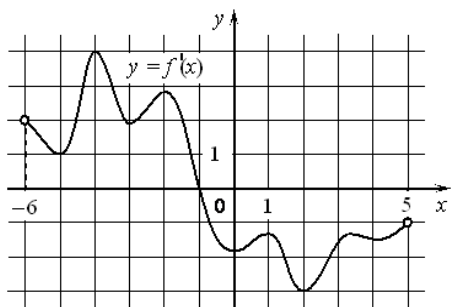


**Задание 26.** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите точку минимума функции  $f(x)$ .

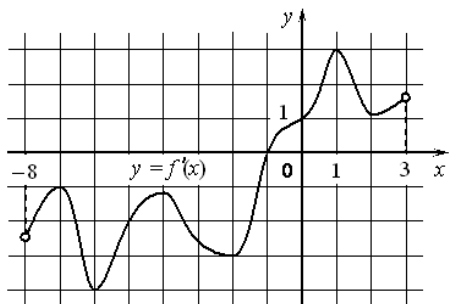


**Задание 27.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 9)$ . В какой точке отрезка  $[2; 8]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

**Задание 28.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 8)$ . В какой точке отрезка  $[-2; 3]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

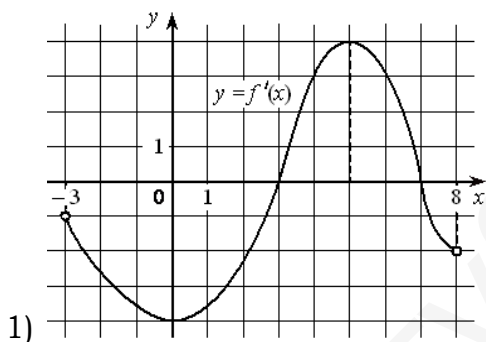


**Задание 29.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 5)$ . В какой точке отрезка  $[-5; -1]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

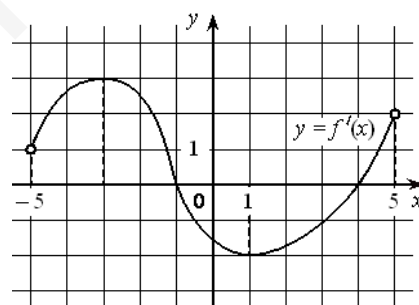


**Задание 30.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 3)$ . В какой точке отрезка  $[-6; -1]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?

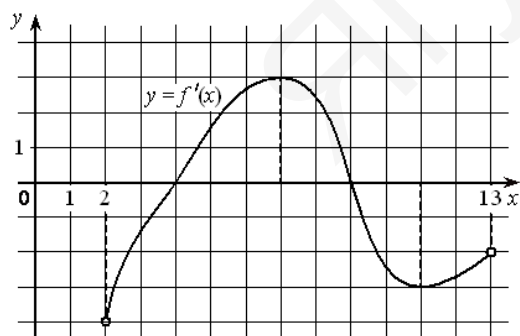
**Задание 31.** На рисунке изображён график функции  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите точку максимума функции  $f(x)$ .



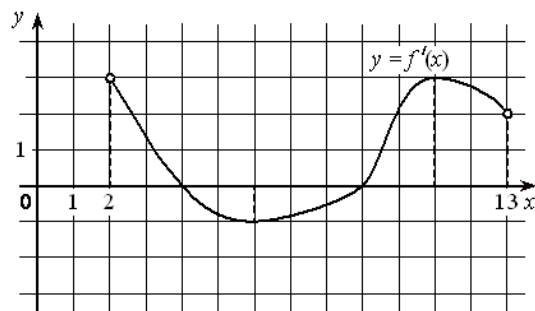
1)



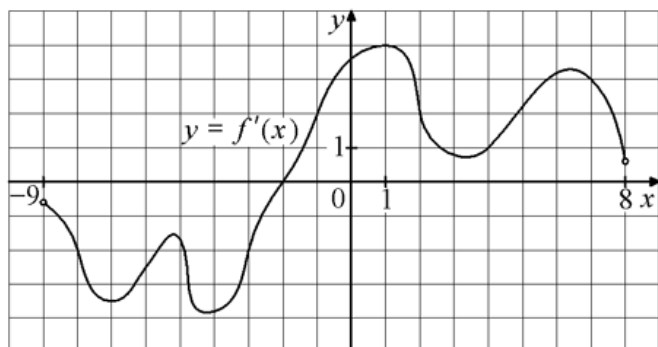
3)



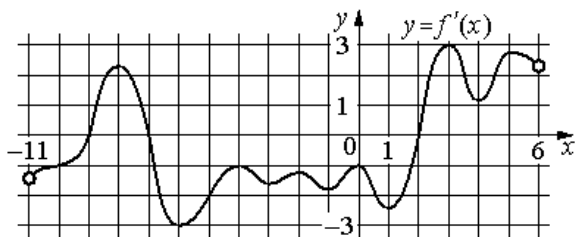
2)



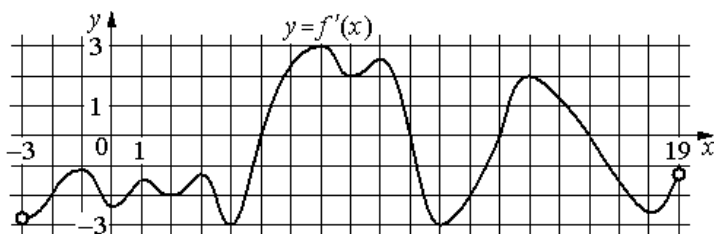
4)



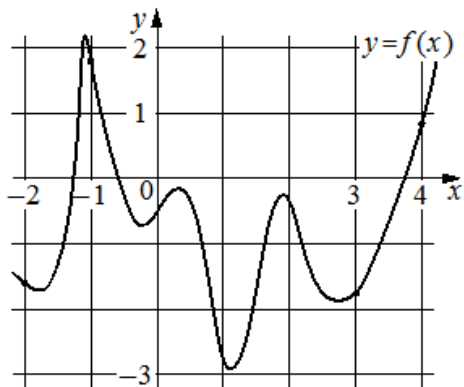
**Задание 32.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-9; 8)$ . Найдите точку экстремума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-3; 3]$ .



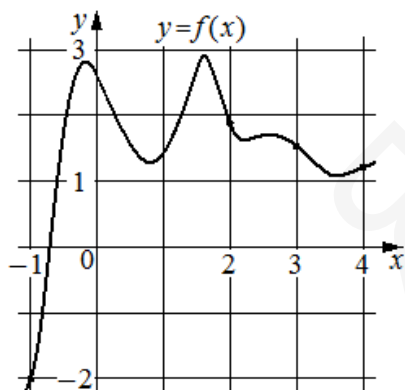
**Задание 33.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-11; 6)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-6; 4]$ .



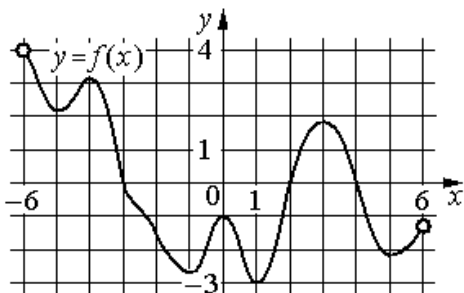
**Задание 34.** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 19)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-2; 15]$ .



**Задание 35.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-2, -1, 3, 4$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



**Задание 36.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены точки  $-1, 2, 3, 4$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



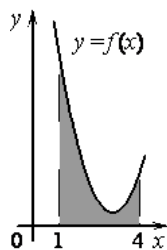
**Задание 37.** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(-6; 6)$ . Найдите количество решений уравнения  $f'(x) = 0$  на отрезке  $[-4, 5; 2, 5]$ .



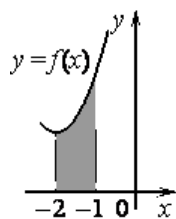
IV) Первообразная

**Задание 38.** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$ . Функция  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ . Найдите площадь закрашенной фигуры:

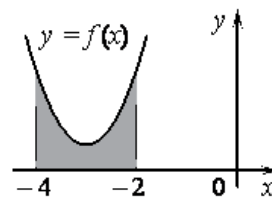
1)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$



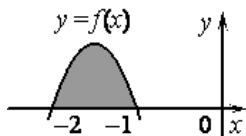
3)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{7}{2}$



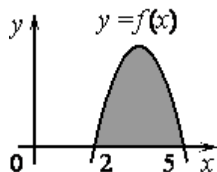
5)  $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + 9x^2 + 14x + 8$



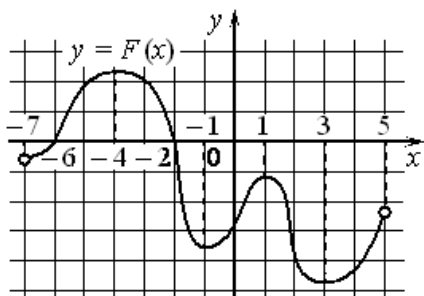
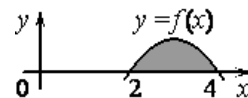
2)  $F(x) = -x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 6x + 2$



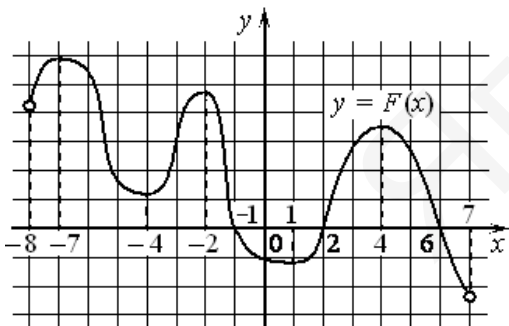
4)  $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - 15x - 4$



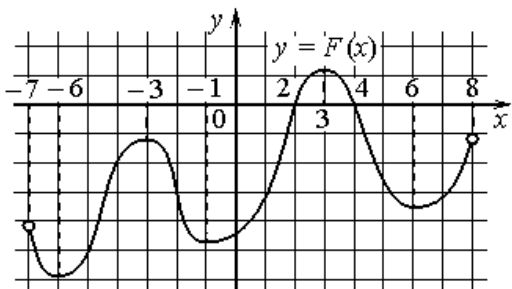
6)  $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5$



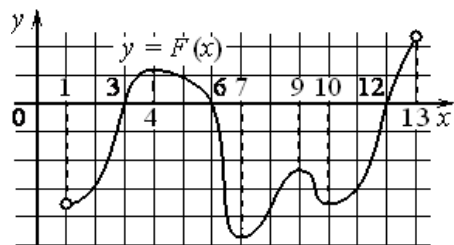
**Задание 39.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 5)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-5; 2]$ .



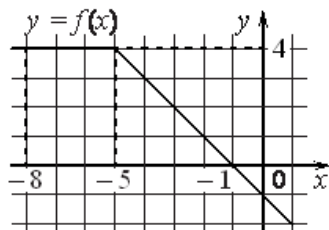
**Задание 40.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 7)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-5; 5]$ .



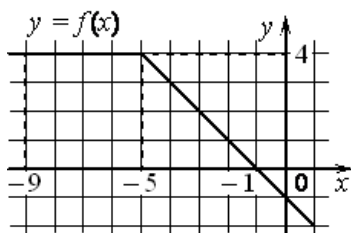
**Задание 41.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-7; 8)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[0; 5]$ .



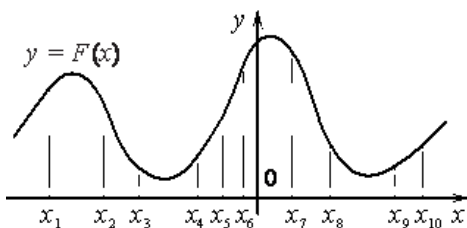
**Задание 42.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(1; 13)$ . Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[2; 11]$ .



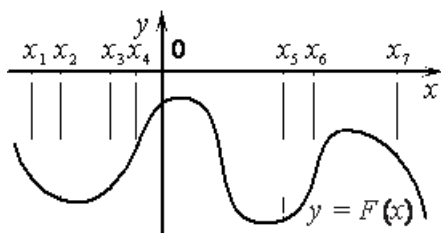
**Задание 43.** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(-1) - F(-8)$ , где  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ .



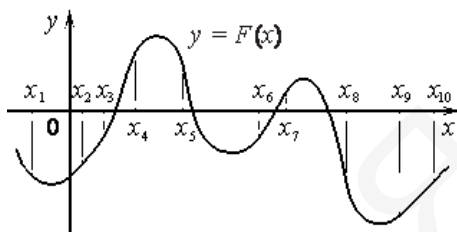
**Задание 44.** На рисунке изображён график некоторой функции  $y = f(x)$  (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите  $F(-1) - F(-9)$ , где  $F(x)$  – одна из первообразных функции  $f(x)$ .



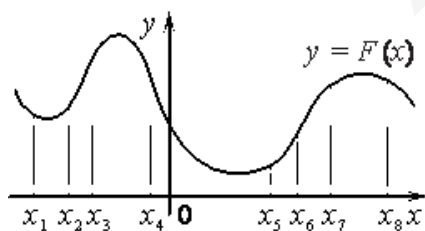
**Задание 45.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  положительна?



**Задание 46.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  положительна?



**Задание 47.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  отрицательна?



**Задание 48.** На рисунке изображён график  $y = F(x)$  одной из первообразных некоторой функции  $f(x)$  и отмечены  $n$  точек на оси абсцисс:  $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . В скольких из этих точек функция  $f(x)$  отрицательна?