*XII Международная Жаутыковская олимпиада по математике*
*Алматы, 2016*

**16 января 2016 года, 9.00-13.30**
**Второй день**
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Найдите все $k > 0$, при которых существует строго убывающая функция $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$ при всех положительных $x$.

2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Точки $M$, $N$ и $K$ – точки пересечения прямых $BD$ и $AE$, $AC$ и $DF$, $CE$ и $BF$ соответственно. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из точек $M$, $N$ и $K$ к прямым $AB$, $CD$ и $EF$ соответственно, пересекаются в одной точке.

3. Натуральное число $q$ назовём *удобным знаменателем* для вещественного числа $\alpha$, если $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$ при некотором целом $p$. Докажите, что если у двух иррациональных чисел $\alpha$ и $\beta$ множества удобных знаменателей совпадают, то $\alpha + \beta$ или $\alpha - \beta$ – целое число.

*XII International Zhautykov Olympiad in Mathematics*
*Almaty, 2016*

**January 16, 2016, 9:00-13:30**
**Second day**
(Each problem is worth 7 points)

1. Find all $k > 0$ for which a strictly decreasing function $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ exists such that $g(x) \geqslant kg(x + g(x))$ for all positive $x$.

2. A convex hexagon $ABCDEF$ is given such that $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. The points $M$, $N$, $K$ are common points of the lines $BD$ and $AE$, $AC$ and $DF$, $CE$ and $BF$ respectively. Prove that perpendiculars drawn from $M$, $N$, $K$ to lines $AB$, $CD$, $EF$ respectively are concurrent.

3. We call a positive integer $q$ *a convenient denominator* for a real number $\alpha$ if $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{10q}$ for some integer $p$. Prove that if two irrational numbers $\alpha$ and $\beta$ have the same set of convenient denominators then either $\alpha + \beta$ or $\alpha - \beta$ is an integer.