Основное тригонометрическое тождество

Косинус и синус угла α, будучи соответственно абсциссой и ординатой точки тригонометрической окружности, не являются независимыми величинами. Их связывает *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{1}$$

Основное тригонометрическое тождество позволяет находить синус угла по известному косинусу или, наоборот, косинус угла по известному синусу. Для определения знака искомой тригонометрической функции требуется дополнительная информация о величине угла (например, в какой четверти расположена точка α).

Пример 1. Вычислить $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}\,.$$

Теперь остаётся извлечь квадратный корень и поставить правильный знак у синуса. Вот для этого и дана дополнительная информация об угле.

Точка α расположена в первой четверти, так что $\sin\alpha > 0$ (рис. 1). Поэтому

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}\,.$$

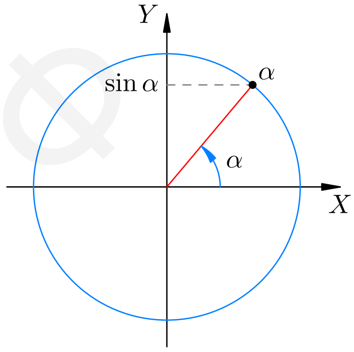

Рис. 1. $\sin\alpha > 0$

Пример 2. Вычислить $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Действуем по той же схеме. Из основного тригонометрического тождества находим:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}\,.$$

Точка α расположена во второй четверти (рис. 2), так что $\cos\alpha < 0$. Стало быть, извлекая корень, ставим знак минус:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

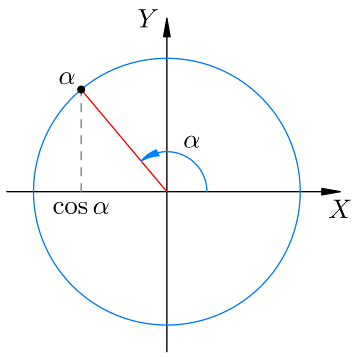

Рис. 2. $\cos\alpha < 0$

Основное тригонометрическое тождество приводит к двум формулам, связывающим соответственно косинус с тангенсом и синус с котангенсом.

1. Пусть $\alpha \neq \pi/2 + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Тогда $\cos\alpha \neq 0$. Делим обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,,$$

или

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,. \tag{2}$$

2. Пусть $\alpha \neq \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тогда $\sin\alpha \neq 0$. Делим обе части равенства (1) на $\sin^2\alpha$:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,,$$

или

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\,. \tag{3}$$

Пример 3. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Из соотношения (2) находим:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{5}\,.$$

По основному тригонометрическому тождеству получаем также:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{4}{5}\,.$$

Точка α расположена в третьей четверти (рис. 3). Синус и косинус там отрицательны, следовательно:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

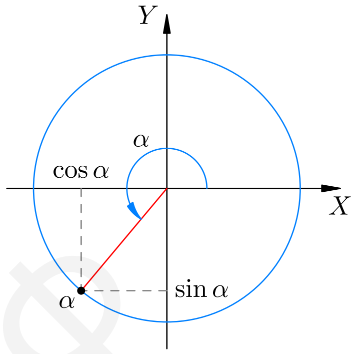

Рис. 3. $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$

Пример 4. Вычислить $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Сразу же находим тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{5}{12}\,.$$

Задача свелась к предыдущей, но мы для разнообразия используем формулу (3). Имеем:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{144}{25}} = \frac{25}{169}\,.$$

Отсюда

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}\,.$$

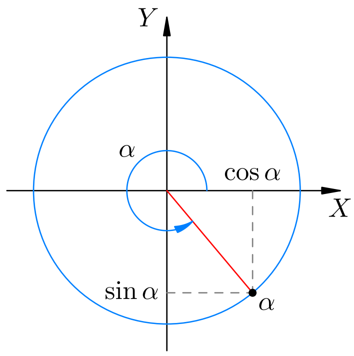

Рис. 4. $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$

По условию точка α лежит в четвёртой четверти (рис. 4), так что $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$. Следовательно,

$$\sin\alpha = -\frac{5}{13}\,, \quad \cos\alpha = \frac{12}{13}\,.$$